Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение
«Средняя общеобразовательная школа № 12»
Тульская область, город Новомосковск, ул. Молодёжная, 2а

III Всероссийский конкурс учебно-исследовательских и проектных работ школьников по математике, физике и информатике
«От школьных проектов – к научным открытиям»

Тема проекта: Самая древняя нерешенная задача - «проблема совершенных чисел».

Автор: Острикова Ксения Максимовна
Научный руководитель:
Канатьева Екатерина Сергеевна

АННОТАЦИЯ

Проект «Самая древняя нерешенная задача - «проблема совершенных чисел» знакомит нас понятием совершенного числа. Тип проекта: информационный. Цель проекта изучить, какие числа называются совершенными и историю их открытия. В данной работе приведены примеры совершенных чисел, история их открытия и проблемы, возникающие при открытии новых чисел.

Собранный в ходе работы материал может быть использован на внеурочных занятиях для расширения знаний по математике выходящие за пределы школьной программы.

Содержание

ВВЕДЕНИЕ

Проблема совершенных чисел – задача, над которой работали многие известные математики, но никто из них не приблизился к ее решению. Так, один математик Евклид увлекся изучением самой древней нерешенной задачи, и заметил некоторые закономерности, благодаря которым вывел формулу, с помощью которой можно находить эти числа.

Цель: изучить, какие числа называются совершенными и историю их открытия

Задачи:

рассмотреть историю появления совершенных чисел

выяснить есть ли закономерности в совершенных числах

узнать какие великие математики открывали совершенные числа

ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

Совершенное число - это число, делители которого, не считая самого числа, в сумме дают это же число. Так, возьмем на пример самое маленькое совершенное число - 6. Его можно поделить на 1, 2, 3 и 6. 1, 2 и 3 в сумме дают 6.

Древним грекам были известны только совершенные числа 6, 28 и 496. В течение следующей тысячи лет никто не находил пятое число. Тогда же, появился Евклид, который серьезно увлекся этой задачей, и сделал прорыв в этой теме. Он нашел закономерность, которой следуют совершенные числа.
« Берем 1, и удваиваем, получаем 2, продолжаем удваивать, получаем 4, 8, 16, 32 и т.д.. Получилась строчка: 1, 2, 4, 8, 16, 32 , 64 …. Теперь складываем первые два числа: 1+ 2 = 3, если получилось простое число, то умножаем его на последнее прибавляемое число, 3*2 = 6. Получаем первое совершенное число. Продолжим дальше складывать: 1 + 2 + 4 = 7, 7 — простое число, поэтому умножаем его на 4. 7*4 = 28. Получилось второе совершенное число. Если при сложении получается непростое число, то просто продолжаем прибавлять дальше, пока не получим простое.

Таким образом, можно и дальше находить совершенные числа, а можно записать это в другом виде.

$6 = (1+2)*2^1$		$6 = (2^2 - 1)*2^1$
$28 = (1+2+4)*2^2$	или же	$28 = (2^3 - 1)*2^2$
$496= (1+2+4+8+16)*2^4$		$496 = (2^5 - 1)*2^4$

Записав совершенные числа так, Евклид создал формулу, заменив степень на переменную p - «$(2^p -1)* 2^{p-1}$». Теперь можно находить новые совершенные числа, просто находя новые значения p, при которых $(2^p -1)$ — простое число. На данный момент это утверждение носит имя — формула Евклида. Однако математик не доказал, что это единственный способ находить совершенные числа.

Древнегреческий ученый Никомах опубликовал введение в арифметику, которое на тысячу лет стало основным трудом по математике. Он предположил пять гипотез, которые считал верными, но доказывать их не стал.

Данные гипотезы:

1. n совершенное число содержит n цифр.
2. Все совершенные числа четные.
3. Все совершенные числа поочередно заканчиваются на 6 и 8 .
4. По формуле Евклида вычисляются все чётные совершенные числа.
5. Совершенных чисел бесконечно много.

Следующую тысячу лет эти допущения никто не мог ни доказать, ни опровергнуть . Их принимали за аксиому.

Далее, появился ученый Исмаил Ибн Фалус, который решил поработать над этой проблемой. Он составил список 10-ти совершенных чисел, и соответствующих им значений р. Из них 3 числа оказались вовсе не совершенны. Осталось 7 последовательных совершенных чисел. Ученый заметил, что пятое число состоит из восьми цифр, что опровергает первую теорию Никомаха. Дальше выяснилось, что два последовательных числа, пятое и шестое, заканчиваются на одинаковую цифру, шесть, что опровергает еще одну теорему Никомаха, третью.

Таким образом, спустя тысячу лет были опровергнуты две гипотезы из пяти.

Номер числа	Значение р	По формуле $(2^p - 1) * 2^{p-1}$
1	2	6
2	3	28
3	5	496
4	7	8 128
5	13	*33 550 33**6***

6	17	8 589 869 05**6**
7	19	137 438 691 328

Табл. 1

Дальше интересоваться совершенными числами стал французский математик Марен Мерсенн. Он потратил много времени на изучение этой задачи, и в 1644 году опубликовал список 11-ти значений p, при которых получались простые числа. Первые семь действительно дают совершенные числа, и эти значения 2^p -1 носят название простые числа Мерсенна. А вот все остальные содержали от 15 знаков, и о таких числах сложно сказать простые они или нет. Мерсенн говорил: «если проверять простое ли число состоящее от 15 знаков, никакого времени не хватит». Вопрос совершенных чисел Мерсенн обсуждал и с другими математиками того времени. В 1638 году Рене Декард писал Мерсенну: «думаю, я могу доказать, что не существует других четных совершенных чисел, кроме евклидовых». А еще он считал, что если существует нечетное совершенное число, то оно имеет другой вид. Это должно быть произведение простого на квадрат другого числа и иметь формулу - «$N = p_S M^2$». Если бы он оказался прав, то это был бы самый значительный прорыв со времен Евклида. Но ни одно из заявлений Декард подтвердить не смог.

Примерно через сто лет математик Христиан Гольдбах обнаружил 29-летнего гения, которому позже рассказал о проблеме совершенных чисел и представил работы других ученых. Этим гением был молодой Леонард Эйлер. Поначалу он не заинтересовался данной темой, но позже, стараниями Гольдбаха, взялся за изучение теории чисел.
Эйлер начал с того, на чем остановился Декард, но преуспел больше. Ему стали принадлежать три достижения:

1. Эйлер нашел 8-ое совершенное число.

Для этого ему пришлось самому подтвердить, что «2^{31} -1» или «2 305 843 008 139 952 128» это простое число.

2. доказал четвертую гипотезу Никомаха о том, что по формуле Евклида вычисляются все четные совершенные числа. Для этого ему потребовалось открыть новый инструмент - Сигма функцию. Сигма функция — сложение всех делителей числа, включая само число. Сигма функция совершенного числа всегда даст число вдвое больше. После долгих размышлений он доказал, что сигма функцию любого числа можно разложить на сигма функции его делителей. Но на этом он не остановился.

3. Эйлер хотел решить проблему нечетных совершенных чисел, поэтому принялся решать второе утверждение Декарда, «если существует нечетное совершенное число, то оно имеет другой вид».

После долгих математических размышлений он пришел к тому же выводу что и Декард. Эйлер немного уточнил расчеты и сказал, что совершенные нечетные числа должны соответствовать условию:

$N = p^{4K+1}M^2$, при $p=(4n+1)$ простое число.

Однако несмотря на его достижения, доказать или опровергнуть тот вопрос, существуют ли нечетные совершенные числа ему не удалось. И вот, с 500 года до н.э. по 1727 года, за 2 227 лет найдено 8 совершенных чисел. Спустя 225 лет были открыты следующие 4 числа. Итого, за 2452 года найдено всего 12 совершенных чисел.

Подтвердить, правда ли большие числа Мерсенна простые - очень сложно. Поэтому, в 1952 году математик Рафаэль Робинсон написал программу для самого быстрого компьютера того времени. За десять месяцев он нашел следующие пять простых чисел Мерсенна, и соответствующие им совершенные числа. С помощью компьютера, следующие 50 лет остальные простые числа Мерсенна вычислялись одно за другими. К концу 1952 года самым большим простым числом было $2^{2\ 281}$ -1. В нем было 687 знаков. А к концу 1994 самым большим было $2^{859\ 433}$ -1, состоящее из 258 716 знаков. Так как числа становились все более огромными, находить новые было все сложнее даже для супер компьютеров.

В 1996 году информатик Джорж Волтман запустил широкомасштабный проект по поиску простых чисел Мерсенна под названием GIMPS. Работа по вычислениям распределяется по множеству компьютеров и любой может предложить мощность своей техники в помощь математика. В рамках этого проекта к 2004 году обнаружено 17 новых простых чисел Мерсенна. В 2017 году священник Джон Пейс участвуя в проекте GIMPS открыл 50-тое простое число Мерсенна, $2^{77\ 232\ 917}$ -1. в этом числе больше 23 249 425 знаков. В 2018 году было открыто еще одно простое число, $2^{82\ 589\ 933}$ -1, состоящее из 24 862 48 знаков. Недавно, в 2024 году было открыто рекордное, самое большое на данный момент число, $2^{136279841}$ -1 , для записи которого потребуется 41 миллион знаков.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В течение 2524 лет математики продолжали изучать совершенные числа, ведь это одновременно простая, но в тоже время сложная задача. За все время изучения открыто 52 совершенных числа. Каждое новое число намного больше предыдущего, поэтому на нахождение нового числа требуется много времени даже компьютерам. Появились вопросы, на которые сейчас нет ответов. Бесконечное ли множество совершенных чисел? Есть ли нечетные совершенные числа? Можно ли находить совершенные числа по другим, неизвестным на данный момент формулам? На сколько далеко с помощью цифровых технологий продвинется изучение теории чисел?

Возможно, когда-нибудь человечество узнает ответы на эти вопросы и, наконец, решит самую древнюю задачу, проблему совершенных чисел.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1) Бенгина Т.А. ПРОСТЫЕ ЧИСЛА МЕРСЕННА / Бенгина Т.А. [Электронный ресурс] // Научная электронная библиотека «КиберЛенинка» : [сайт]. — URL: https://cyberleninka.ru/article/n/prostye-chisla-mersenna (дата обращения: 14.03.2025).

2) Депман И. Я. История арифметики. — 1965 / Депман И. Я. [Электронный ресурс] // «Математическое образование»: [сайт]. — URL: https://www.mathedu.ru/text/depman_istoriya_arifmetiki_1965/p147/ (дата обращения: 14.03.2025).

3) Попов, И. Н. Совершенные и дружественные числа [Текст] / И. Н. Попов — . — Архангельск: Поморский университет, 2005 — 153 с.